# A L G O R I T M O   S I M P L E X   R E V I S T O

O Algoritmo Simplex Revisto tira partido da formulação matricial do Simplex de modo a reduzir ao mínimo o volume de cálculos efectuados.

Consideremos um problema de Programação Linear expresso na forma standard e representado matricialmente:

**Maximizar $F = C \cdot X$**

**sujeito a:**

$$A \cdot X = b$$

$$X \geq 0$$

Na representação anterior, as matrizes são as apresentadas na "Formulação Matricial do Simplex".

Poderemos resumir os **passos principais do Algoritmo Simplex Revisto, relativos a uma dada iteração**:

## 1 - Critério de Optimalidade

Exprimir a função objectivo em função das variáveis não básicas, ou seja, calcular os coeficientes dessas variáveis, $\mathbf{r = - C_D + C_B \cdot B^{-1}.D}$ ( 1 x ( n - m ) ).

Se todos os coeficientes $r_k$ ( k = 1 , 2, ... , n-m ) forem não negativos, então a solução em análise é óptima, verificando-se $\mathbf{X_B^* = B^{-1}.b}$ e $\mathbf{F^* = + C_B \cdot B^{-1}.b}$ . [ Atenção: se se tratar da base inicial, dever-se-ia verificar se a solução era admissível, isto é, se $X_B \geq 0$ ]. Se algum dos coeficientes $r_k$ for negativo, então a solução em análise não é óptima, devendo seleccionar-se para entrar na base a variável correspondente ao coeficiente $r_k$ mais negativo.

## 2 - Determinação das variáveis que pertencem à Nova Base

Se pretendermos fazer **entrar para a base a k-ésima variável**, deve-se determinar qual a variável que deve sair da base.

Para tal,

• Começa-se por calcular o vector $\mathbf{v_k}$ ( m x 1 ), correspondente à coluna que representa a k-ésima variável no novo Quadro do Simplex [ Nota: $\mathbf{v_k}$ é uma coluna da matriz $\mathbf{B^{-1}.D}$ ] :

$\mathbf{v_k = B^{-1}.a_k}$ , sendo $\mathbf{a_k}$ a coluna da matriz dos coeficientes **A** correspondente à k-ésima variável.

• Calcula-se, em seguida, os quocientes $\Delta_i = ( \mathbf{B^{-1}.b} )_i \;/\; ( \mathbf{v_k} )_i$ , para $( \mathbf{v_k} )_i > 0$ e $i = 1, 2, \dots , m$.

• Calcula-se $\Delta = \min ( \Delta_i )$ , $i = 1, 2, \dots , m$. Se $\Delta = \Delta_s$ , **a s-ésima variável deverá deixar a base**.

**Conhecemos, assim, as variáveis que pertencem à nova base.**

## 3 - Mudança de Base

Escrever as matrizes **B**, **D**, $\mathbf{C_B}$ e $\mathbf{C_D}$ correspondentes à nova base.
Calcular $\mathbf{B^{-1}.D}$ e $\mathbf{B^{-1}.b}$.

Voltar a **1**.

Sintetizando, poderemos apresentar os passos mais importantes a seguir, numa dada iteração, pelo

## ALGORITMO SIMPLEX REVISTO

**1 -** Calcular $\mathbf{r = - C_D + C_B . B^{-1}.D}$ .
$\mathbf{r} \geq \mathbf{0} \Rightarrow$ solução óptima: $\mathbf{X_B^* = B^{-1}.b}$ e $\mathbf{F^* = + C_B . B^{-1}.b}$ ;
caso contrário, seleccionar a variável correspondente ao $\mathbf{r_k}$ mais negativo para entrar na base.

**2 -** Calcular $\mathbf{v_k = B^{-1}.a_k}$ .
Calcular $\Delta_i = ( \mathbf{B^{-1}.b} )_i \;/\; ( \mathbf{v_k} )_i$ , para $( \mathbf{v_k} )_i > 0$ e $i = 1, 2, \dots , m$.
Calcular $\Delta = \min ( \Delta_i )$ , $i = 1, 2, \dots , m$. Se $\Delta = \Delta_s$ , a s-ésima variável deverá deixar a base.

**3 -** Escrever as matrizes **B**, **D**, $\mathbf{C_B}$ e $\mathbf{C_D}$ correspondentes à nova base.
Calcular $\mathbf{B^{-1}.D}$ e $\mathbf{B^{-1}.b}$.

Voltar a **1**.

Um aspecto importante deve ser focado: **a escolha da base inicial**. Num exercício meramente académico a base inicial é, geralmente, indicada. Contudo, se tivermos que escolher uma base inicial, **tentaremos que as "variáveis originais do problema" estejam, tanto quanto possível, na base inicial**, visando diminuir o volume de cálculo. Assim, não fará sentido adoptarmos uma base inicial formada maioritariamente (ou exclusivamente) por variáveis de folga (a regra habitual do Algoritmo Simplex Primal).

Teremos sempre que ter um cuidado importante: **a base inicial adoptada deverá corresponder sempre a uma solução básica admissível !** Se, por acaso, se tivesse adoptado uma determinada base e se tivesse constatado posteriormente tratar-se de uma solução básica não admissível, dever-se-ia adoptar uma nova base inicial e refazer os cálculos.

Resolvamos agora o seguinte exercício:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

**Maximizar** $F = 3 . X + Y$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} X &\geq 1 \\ Y &\geq 2 \\ X + Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

**Resolva-o recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, a partir da base inicial ($X,Y,F_3$ ).**

**Nota: $F_3$ designa a variável de folga associada à terceira restrição.**

## 1ª Iteração

**1 -** **Base inicial:**

$$B = \begin{array}{ccc} X & Y & F_3 \end{array} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

**$F_1$ deve entrar para a base**

Nota: $r = - C_D + C_B . B^{-1}.D$ $\quad X_B = B^{-1}.b$ $\quad F = C_B . B^{-1}.b$

**2 -**

$$v_{F1} = B^{-1}.a_{F1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{F1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 =$ —
$\Delta_2 =$ —
$\Delta_3 = 2 / 1$ $\leftarrow$ **a 3ª variável básica ( $F_3$ ) sái da base**
$\Delta = 2$

**3 -** **Nova base: ( X, Y , $F_1$)**

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & F_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{matrix} F_2 & F_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**- 2ª iteração -**

**1 -**

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, X* = 3; Y* = 2 com F* = 11.**

Aproveite para resolver este problema utilizando o Método Gráfico e para constatar que, para o resolver pelo Algoritmo Simplex Primal, não poderia tomar como base inicial ( $F_1$ , $F_2$ , $F_3$ ) [teria que recorrer à Técnica da Base Artificial ...] .



Ainda relativamente a este problema, e embora o enunciado o não peça, aproveitaremos os cálculos efectuados para apresentar o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima:

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | TI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Y | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| $F_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | + 2 | + 3 | 11 |

# A N Á L I S E   D E   S E N S I B I L I D A D E

# A N Á L I S E   P Ó S - O P T I M A L I D A D E

Recordemos o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

**Maximizar** $F = 3 . X + Y$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} X \quad\quad &\geq 1 \\ Y &\geq 2 \\ X + Y &\leq 5 \\ X \, , \, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

**Resolva-o recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, a partir da base inicial ($X,Y,F_3$ ).**

**Nota: $F_3$ designa a variável de folga associada à terceira restrição.**

Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis X, Y e $F_1$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & F_1 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \end{array} \\ D = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, $X^* = 3$; $Y^* = 2$; $F^* = 11$**



Imagine que o coeficiente da variável X na função objectivo (originalmente igual a 3) poderia variar ligeiramente, tomando valores no intervalo [ 1 ; 5 ]. Poder-se-ia perguntar "Qual a sensibilidade da solução óptima do problema a essa variação ?". Será que a solução óptima é sempre a mesma nesse domínio de variação do coeficiente de X na função objectivo ?  Ou, pelo contrário, a solução óptima do problema é muito sensível à variação desse coeficiente ?

Podemos também imaginar que o termo independente da primeira restrição tinha sido alterado de 1 para 2.  É legítima a pergunta: "Será que se mantém a solução óptima determinada ?".

E o que acontece se, depois de determinar a solução óptima de um dado problema de Programação Linear, descobrirmos que se deveria ter introduzido uma restrição adicional ?  Dever-se-ia voltar ao início da resolução ?

As questões levantadas justificam a **Análise de Sensibilidade / Análise de Pós--Optimalidade**, isto é o estudo da sensibilidade da solução óptima de um determinado problema de Programação Linear à variação de algum(ns) dos coeficientes intervenientes / estudo da variação da solução óptima de um problema de Programação Linear face à alteração de algum(ns) dos coeficientes intervenientes e/ou introdução de novas restrições ou novas variáveis.

Comecemos por apresentar, de um modo mais geral, algumas das situações mais importantes com que nos poderemos deparar:

- **Variações nos coeficientes da função objectivo**

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{I} & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -\,C_D + C_B\,.\,B^{-1}.D & C_B\,.\,B^{-1}.b \end{array}\right]$$
$$r = \nearrow \qquad\qquad F = \nearrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{I} & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -\,\mathbf{C_D'} + \mathbf{C_B'}\,.\,B^{-1}.D & \mathbf{C_B'}\,.\,B^{-1}.b \end{array}\right]$$
$$\mathbf{r'} = \nearrow \qquad\qquad \mathbf{F'} = \nearrow$$

**Uma alteração nos coeficientes da função objectivo** (novos valores dos coeficientes: $\mathbf{C_D'}$ ; $\mathbf{C_B'}$ ) **não põe em causa a admissibilidade** da solução correspondente ao último Quadro (antes de se efectuar as alterações).  Com efeito, não há qualquer alteração em  $B^{-1}.b$ .  No entanto, **a optimalidade pode ser posta em causa**, já que os coeficientes das variáveis não básicas na função objectivo são alterados: $\mathbf{r'} = -\,\mathbf{C_D'} + \mathbf{C_B'}\,.\,B^{-1}.D$ .  [De notar que $B^{-1}.D$ corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Assim, há que verificar se se mantém a optimalidade da solução.  Se $\mathbf{r'} \geq \mathbf{0}$, então a solução anteriormente determinada mantém-se óptima, devendo-se apenas alterar o valor óptimo da função objectivo para $F' = \mathbf{C_B'}\,.\,B^{-1}.b$ . [De notar que $B^{-1}.b$ corresponde ao último Quadro (óptimo)].  Se, pelo contrário, algum dos coeficientes do vector **r'** for negativo, a solução anteriormente determinada deixou de ser óptima, devendo prosseguir-se com o Algoritmo Simplex Primal (eventualmente na versão matricial - Algoritmo Simplex Revisto).

- **Variações nos termos independentes das restrições**

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -\,C_D + C_B\,.\,B^{-1}.D & C_B\,.\,B^{-1}.b \end{array}\right]$$

$$r = \nearrow \qquad\qquad F = \nearrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.\mathbf{b'} \\ \hline 0 & -\,C_D + C_B\,.\,B^{-1}.D & C_B\,.\,B^{-1}.\mathbf{b'} \end{array}\right]$$

$$r = \nearrow \qquad\qquad \mathbf{F'} = \nearrow$$

**Uma alteração nos termos independentes das restrições** (novos valores no vector dos termos independentes: **b'** ) **não põe em causa a optimalidade** da solução correspondente ao último Quadro (antes de se efectuar as alterações). Com efeito, não há qualquer alteração em $r = -C_D + C_B\,.\,B^{-1}.D$ . No entanto, **a admissibilidade pode ser posta em causa**, já que o vector das variáveis básicas sofre alterações: $\mathbf{X_B'} = B^{-1}.\mathbf{b'}$ [De notar que $B^{-1}$ corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Assim, há que verificar se se mantém a admissibilidade da solução. Se $\mathbf{X_B'} \geq \mathbf{0}$, então a solução anteriormente determinada mantém-se admissível (e óptima), devendo-se apenas alterar o valor óptimo da função objectivo para $F' = C_B\,.\,B^{-1}.\mathbf{b'}$ . [De notar que $C_B.B^{-1}$ corresponde ao último Quadro (óptimo)]. Se, pelo contrário, algum dos coeficientes do vector $\mathbf{X_B'}$ for negativo, a solução anteriormente determinada deixou de ser admissível, continuando, no entanto, a verificar o critério de optimalidade. Para determinar a nova solução óptima a partir do último Quadro, poder-se-á prosseguir com o Algoritmo Simplex **Dual** (ou, alternativamente, arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal).

- **Variações nos coeficientes das restrições**

A introdução de alterações nos coeficientes das restrições pode afectar só a matriz B, só a matriz D, ou ambas.

Como a matriz B intervém no vector das variáveis básicas e no vector dos coeficientes das variáveis não básicas na função objectivo, podemos concluir que **uma alteração que envolva a matriz B obriga à verificação quer da admissibilidade quer da optimalidade**. Se $\mathbf{X'_B \geq 0}$ **e** $\mathbf{r' \geq 0}$ , mantém-se óptima a base correspondente ao Quadro anterior (embora se alterem os valores das variáveis básicas $\mathbf{X'_B = B'^{-1}.b}$ e o valor da função objectivo $\mathbf{F' = C_B\,.\,B'^{-1}.b}$). Se $\mathbf{X'_B \geq 0}$ **e** $\mathbf{r' < 0}$ , mantém-se a admissibilidade da base correspondente ao Quadro anterior, mas não a sua optimalidade (pelo que se deverá prosseguir com o Algoritmo Simplex Primal). Se $\mathbf{X'_B < 0}$ **e** $\mathbf{r' \geq 0}$ , continua a verificar-se a optimalidade da base correspondente ao Quadro anterior, mas não a admissibilidade (para determinar a nova solução óptima a partir do último Quadro, poder-se-á prosseguir com o Algoritmo Simplex **Dual** ou, alternativamente, arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal). Se $\mathbf{X'_B < 0}$ **e** $\mathbf{r' < 0}$ , a base correspondente ao último Quadro deixou de ser admissível e deixou de ser óptima, pelo que se deverá arbitrar uma nova solução básica <u>admissível</u> inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal.

Como a matriz D não intervém no vector das variáveis básicas, podemos concluir que **uma alteração que envolva a matriz D obriga à verificação apenas da optimalidade, já que a admissibilidade não é posta em causa**. Se $\mathbf{r'} \geq \mathbf{0}$ , mantém-se óptima a base correspondente ao Quadro, embora se tenham alterado os valores das variáveis básicas ( $\mathbf{X'_B = B'^{-1}.b}$ ) e o valor da função objectivo ( $\mathbf{F' = C_B . B'^{-1}.b}$ ); se $\mathbf{r' < 0}$ a base correspondente ao Quadro anterior deixa de ser óptima, pelo que se deverá prosseguir com o Algoritmo Simplex Primal.

Esquematicamente, tem-se:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_D + C_B . B^{-1}.D & C_B . B^{-1}.b \end{array}\right]$$
$$r = \nearrow \qquad F = \nearrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I & \mathbf{B'^{-1}.D'} & \mathbf{B'}^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_D + C_B . \mathbf{B'^{-1}.D'} & C_B . \mathbf{B'}^{-1}.b \end{array}\right]$$
$$\mathbf{r'} = \nearrow \qquad F' = \nearrow$$

- ## Introdução de novas variáveis

A introdução de uma nova variável (que, claro está, não pertence à base óptima correspondente ao último Quadro) representa a introdução de uma nova coluna na matriz **D**, que designaremos por $\mathbf{d_n}$, e de um novo coeficiente na função objectivo (formalmente, uma coluna adicional em $\mathbf{C_D}$), que designaremos por $\mathbf{c_n}$.

A admissibilidade da base correspondente ao último Quadro não é posta em causa, já que nada afecta o vector das variáveis básicas, $X_B = B^{-1}.b$. No entanto, a optimalidade deverá ser verificada, no tocante à nova variável. Será que ela deve entrar para a base e, assim, contribuir para uma melhoria da função objectivo ? Ou, pelo contrário, sabemos que ela deve continuar fora da base óptima ? Para responder a estas questões calcularemos o coeficiente da nova variável na função objectivo no Quadro do Simplex: $\mathbf{r_n = - C_n + C_B . B^{-1}. d_n}$ . [De notar que $C_B . B^{-1}$ corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Se $\mathbf{r_n} \geq \mathbf{0}$, mantém-se a optimalidade da base correspondente ao último Quadro, mantendo-se quer os valores das variáveis básicas, quer o valor da função objectivo. Se $\mathbf{r_n < 0}$, a nova variável deverá entrar para a base, prosseguindo-se com o Algoritmo Simplex Primal (com a determinação da variável que deve sair da base).

- ## Introdução de novas restrições

A introdução de uma nova restrição corresponde a uma eventual alteração no espaço de soluções admissíveis. Esta alteração, ainda que efectiva, não significa necessariamente uma alteração na solução óptima do problema previamente determinada. Ilustremos o que se acaba de referir com um exemplo:

> Considere-se o problema de Programação Linear seguinte:
>
> Maximizar $F = 3 . X + 2 . Y$
>
> sujeito a
> $$\begin{array}{l} X + Y \leq 5 \\ X \leq 3 \\ \\ X \, , \; Y \geq 0 \end{array}$$

É fácil de verificar (por exemplo, recorrendo ao Método Gráfico) que a solução óptima é $X^* = 3$ ; $Y^* = 2$ , com $F^* = 13$.

Imaginemos que se introduz a nova restrição $2 . X + 3 . Y \leq 16$ . Como se pode constatar muito facilmente, esta nova restrição é dominada pela restrição $X + Y \leq 5$, pelo que em nada altera o espaço de soluções admissíveis do problema original. Assim, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original".

Se, no "problema original", se introduzir a nova restrição $4 . X + 6 . Y \leq 25$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original é alterado (é "reduzido" - por exemplo, ( 0 ; 5 ) é solução admissível do "problema original", mas não respeita a nova restrição, pelo que nem sequer é uma solução do "problema alterado"). No entanto, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original", já que ( 3 ; 2 ) também respeita a nova restrição.

Se a nova restrição a introduzir no "problema original" for $4 . X + 6 . Y \leq 22$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original também é alterado e, dado que a solução óptima do "problema original" não respeita a nova restrição, a solução óptima do "problema alterado" não coincidirá com a do "problema original". A nova solução óptima será $X^* = 3$ ; $Y^* = 5/3$ , com $F^* = 37/3$. De notar que, como se esperaria, o valor óptimo da função objectivo do "problema alterado" não é melhor do que o correspondente valor do "problema original".

Assim, **se a solução óptima original não violar a nova restrição, continuará a ser a solução óptima do "problema alterado"**. **Se, pelo contrário, a solução óptima original violar a nova restrição, então ela será uma solução não admissível que verifica o critério de optimalidade do "problema alterado", pelo que a determinação da solução admissível óptima do "problema alterado" pode ser feita com o recurso ao Algoritmo Simplex Dual (alternativamente, dever-se-á arbitrar uma nova solução básica <u>admissível</u> inicial para o "problema alterado" e utilizar o Algoritmo Simplex Primal)**.

Para se utilizar o Algoritmo Simplex Dual, a partir da solução óptima do "problema original" que viola a nova restrição, deve adoptar-se o seguinte procedimento:

> **1** - No Quadro do Simplex correspondente à solução óptima do "problema original" deve adicionar-se uma nova linha correspondente à nova restrição (e, se necessário, uma nova coluna para a eventual nova variável de folga). Com este passo deixamos de estar perante um Quadro do Simplex.

2 - Efectuar as "operações elementares" sobre as linhas do Quadro, de modo a ser possível identificar uma variável básica associada à nova linha e, estar-se de novo perante um Quadro do Simplex (correspondente a uma solução não admissível, que respeita o critério de optimalidade).

**3** - Iniciar o Algoritmo Simplex Dual.

Aproveitemos, agora, o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto, com vista a exemplificarmos as situações agora abordadas:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

**Maximizar $F = 3 . X + Y$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} X \quad\quad & \geq 1 \\ Y & \geq 2 \\ X + Y & \leq 5 \\ X , Y & \geq 0 \end{aligned}$$

**Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis X, Y e $F_1$.**

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, $X^* = 3$; $Y^* = 2$ com $F^* = 11$.**

**a) Admita que o coeficiente da variável X na função objectivo pode variar. Para que valores desse coeficiente se mantém óptima a solução previamente determinada ?**

**b) Imagine que por lapso de edição se tinha indicado que o coeficiente da variável Y na função objectivo era 1, mas o valor real é 10. Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.**

c) Se, no problema original, se alterar o termo independente da segunda restrição de 2 para 3, mantém-se a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.

d) Se, no problema original, se alterar a terceira restrição para $(3/2) \cdot X + Y \leq 5$, manter-se-á a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.

e) Imagine que se introduz, no problema original, uma nova variável não negativa, Z, com coeficiente + 7 na função objectivo F e coeficientes +1, 0 e +2, respectivamente, na 1ª, 2ª e 3ª restrições.

Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.

f) Se, ao problema original, se acrescentar a restrição $2 \cdot X + Y \leq 7$, manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.

Resolução:

**a)** **Seja $\theta$ o valor do coeficiente de X na função objectivo F.**

$$C'_B = \begin{bmatrix} \theta & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \theta - 1 & \theta \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

**A solução óptima anteriormente determinada mantém-se óptima sse**

$$\theta - 1 \geq 0 \ \wedge \ \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq 1$$

**b)**

$$C'_B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} \quad & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 0 & 1 & \\ -1 & -1 & \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{-7} & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 29 \end{bmatrix}$$

**$F_2$ deve entrar para a base**

$$v_{F2} = B^{-1}.a_{F2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{F2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 3 / 1$

$\Delta_2 =$ —

$\Delta_3 = 2 / 1 \leftarrow$ **a 3ª variável básica ( $F_1$ ) sái da base**

$\Delta = 2$

Nova base: $(X, Y, F_2)$

$$B = \begin{array}{ccc} X & Y & F_2 \end{array} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{array}{cc} F_1 & F_3 \end{array} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C'_B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +7 & +10 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 43 \end{bmatrix}$$

**Assim, a nova solução óptima é $X^* = 1$; $Y^* = 4$ com $F^* = 43$.**

c)

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F' = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Mantém-se óptima a base ( X , Y , $F_1$ ),embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: $X^* = 2$ ; $Y^* = 3$ com $F^* = 9$.**

d)

$$\begin{array}{c} \\ B' = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ D = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad B'^{-1}.D = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} +1 & +2 \end{bmatrix} \qquad F' = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Mantém-se óptima a base ( X , Y , $F_1$ ),embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: $X^* = 2$; $Y^* = 2$ com $F^* = 8$.**



e) $r_Z = - c_Z + C_B .B^{-1}.d_Z$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**$= -7 + 6 = -1 \leftarrow$ a solução deixa de ser óptima; Z deve entrar para a base**

$$v_Z = B^{-1}.a_Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 3/2 \leftarrow$ **a 1ª var. básica ( X ) sái da base**

$\Delta_2 =$ —

$\Delta_3 = 2/1$

$\Delta = 3/2$

**Nova base: (Z , Y , $F_1$)**

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z & Y & F_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +7 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} +3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +1/2 & +5/2 & +7/2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 25/2 \end{bmatrix}$$

**Assim, a nova solução óptima é X* = 0; Y* = 2; Z* = 3/2 com F* = 25/2.**

**f) Introdução da nova restrição: $2 . X + Y \leq 7$**

**$( X^* , Y^* ) = ( 3 , 2 ) \Rightarrow 2 . 3 + 2 = 8 > 7$ !**

**Conclusão: a solução óptima vai ser alterada !**

**1 - Introduzir a nova restrição no último Quadro do Simplex.**

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | TI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X ? | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| Y ? | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| $F_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| ? | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| F | 0 | 0 | 0 | + 2 | + 3 | 0 | 11 |

De notar que se deixou de estar perante um Quadro do Simplex !

**2 - Efectuar "operações elementares" para se estar perante um Quadro do Simplex.**

- multiplicar a 1ª linha por ( - 2 ) e somar à 4ª linha
- multiplicar a 2ª linha por ( - 1 ) e somar à 4ª linha

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | TI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| **Y** | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| **$F_1$** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| **$F_4$** | 0 | 0 | 0 | - 1 | - 2 | 1 | - 1 |
| **F** | 0 | 0 | 0 | + 2 | + 3 | 0 | 11 |

**3 - Prosseguir com o Algoritmo Simplex Dual**

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | TI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| **Y** | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | |
| **$F_1$** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | |
| **$F_4$** | 0 | 0 | 0 | - 1 | - 2 | 1 | - 1 | ← **$F_4$ sái da base** |
| **F** | 0 | 0 | 0 | + 2 | + 3 | 0 | 11 | |
| | | | | 2/1 | 3/2 | | | |
| | | | | | ↑ | | | |

**$F_3$ entra na base**

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | TI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 | 5/2 |
| **Y** | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| **$F_1$** | 0 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 3/2 |
| **$F_3$** | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | - 1/2 | 1/2 |
| **F** | 0 | 0 | 0 | + 1/2 | 0 | + 3/2 | 19/2 |

**Conclusão: A nova solução óptima é X* = 5/2; Y* = 2 com F* = 19/2.**

- ## Introdução de novas restrições

A introdução de uma nova restrição corresponde a uma eventual alteração no espaço de soluções admissíveis. Esta alteração, ainda que efectiva, não significa necessariamente uma alteração na solução óptima do problema previamente determinada. Ilustremos o que se acaba de referir com um exemplo:

> Considere-se o problema de Programação Linear seguinte:
>
> Maximizar $F = 3 . X + 2 . Y$
>
> sujeito a
>
> $$\begin{array}{l} X + Y \leq 5 \\ X \leq 3 \\ \\ X , Y \geq 0 \end{array}$$

É fácil de verificar (por exemplo, recorrendo ao Método Gráfico) que a solução óptima é $X^* = 3$ ; $Y^* = 2$ , com $F^* = 13$.

Imaginemos que se introduz a nova restrição $2 . X + 3 . Y \leq 16$ . Como se pode constatar muito facilmente, esta nova restrição é dominada pela restrição $X + Y \leq 5$, pelo que em nada altera o espaço de soluções admissíveis do problema original. Assim, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original".

Se, no "problema original", se introduzir a nova restrição $4 . X + 6 . Y \leq 25$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original é alterado (é "reduzido" - por exemplo, ( 0 ; 5 ) é solução admissível do "problema original", mas não respeita a nova restrição, pelo que nem sequer é uma solução do "problema alterado"). No entanto, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original", já que ( 3 ; 2 ) também respeita a nova restrição.

Se a nova restrição a introduzir no "problema original" for $4 . X + 6 . Y \leq 22$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original também é alterado e, dado que a solução óptima do "problema original" não respeita a nova restrição, a solução óptima do "problema alterado" não coincidirá com a do "problema original". A nova solução óptima será $X^* = 3$ ; $Y^* = 5/3$ , com $F^* = 37/3$. De notar que, como se esperaria, o valor óptimo da função objectivo do "problema alterado" não é melhor do que o correspondente valor do "problema original".

Assim, **se a solução óptima original não violar a nova restrição, continuará a ser a solução óptima do "problema alterado". Se, pelo contrário, a solução óptima original violar a nova restrição, então ela será uma solução não admissível que verifica o critério de optimalidade do "problema alterado", pelo que a determinação da solução admissível óptima do "problema alterado" pode ser feita com o recurso ao Algoritmo Simplex Dual (alternativamente, dever-se-á arbitrar uma nova solução básica <u>admissível</u> inicial para o "problema alterado" e utilizar o Algoritmo Simplex Primal).**



Aproveitemos, agora, o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto, com vista a exemplificarmos as situações agora abordadas:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

**Maximizar $F = 3 . X + Y$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} X \quad\quad &\geq 1 \\ Y &\geq 2 \\ X + Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

**Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis X, Y e $F_1$.**

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

**Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, $X^* = 3$; $Y^* = 2$ com $F^* = 11$.**

**a) Admita que o coeficiente da variável X na função objectivo pode variar. Para que valores desse coeficiente se mantém óptima a solução previamente determinada ?**

**b) Imagine que por lapso de edição se tinha indicado que o coeficiente da variável Y na função objectivo era 1, mas o valor real é 10. Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.**

**c) Se, no problema original, se alterar o termo independente da segunda restrição de 2 para 3, mantém-se a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.**

**d) Se, no problema original, se alterar a terceira restrição para $( 3/2 ) . X + Y \leq 5$, manter-se-á a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.**

**e) Imagine que se introduz, no problema original, uma nova variável não negativa, Z, com coeficiente + 7 na função objectivo F e coeficientes +1, 0 e +2, respectivamente, na 1ª, 2ª e 3ª restrições.**

**Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.**

**f) Se, ao problema original, se acrescentar a restrição $2 . X + Y \leq 7$ , manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.**

Resolução:

**a)** **Seja $\theta$ o valor do coeficiente de X na função objectivo F.**

$$C'_B = \begin{bmatrix} \theta & +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \theta - 1 & \theta \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 3.\theta + 2 \end{bmatrix}$$

**A solução óptima anteriormente determinada mantém-se óptima sse**

$$\theta - 1 \geq 0 \ \wedge \ \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq 1$$

**b)**

$$C'_B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{-7} & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 29 \end{bmatrix}$$

**$F_2$ deve entrar para a base**

$$v_{F2} = B^{-1}.a_{F2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{F2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 3 / 1$

$\Delta_2 =$ —

$\Delta_3 = 2 / 1$ $\leftarrow$ **a 3ª variável básica ( $F_1$ ) sái da base**

$\Delta = 2$

**Nova base: (X, Y , $F_2$)**

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C'_B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +7 & +10 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 43 \end{bmatrix}$$

**Assim, a nova solução óptima é X* = 1; Y* = 4 com F* = 43.**

c) $C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix}$ $C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix}$ $F' = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

**Conclusão: Mantém-se óptima a base ( X , Y , $F_1$ ),embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: X* = 2 ; Y* = 3 com F* = 9.**

d)

$B' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix}$ $C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $B'^{-1}.D = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$r' = \begin{bmatrix} +1 & +2 \end{bmatrix}$ $F' = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$

**Conclusão: Mantém-se óptima a base ( X , Y , $F_1$ ),embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: X* = 2; Y* = 2 com F* = 8.**

e) $r_Z = -c_Z + C_B . B^{-1}. d_Z$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$= -7 + 6 = -1$ ← **a solução deixa de ser óptima; Z deve entrar para a base**

$$v_Z = B^{-1}.a_Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 3/2$ ← **a 1ª var. básica ( X ) sái da base**
$\Delta_2 = $ —
$\Delta_3 = 2/1$
$\Delta = 3/2$

**Nova base: (Z , Y , $F_1$)**

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} Z & Y & F_1 \end{array} \\
B = & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} X & F_2 & F_3 \end{array} \\
D = & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
\qquad
b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array}\right]
$$

$$
C_B = \left[\begin{array}{ccc} +7 & +1 & 0 \end{array}\right] \qquad C_D = \left[\begin{array}{ccc} +3 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]
\qquad
B^{-1}.D = \left[\begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]
\qquad
X_B = \left[\begin{array}{c} 3/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{array}\right]
$$

$$
r = \left[\begin{array}{ccc} +1/2 & +5/2 & +7/2 \end{array}\right] \qquad F = \left[\begin{array}{c} 25/2 \end{array}\right]
$$

**Assim, a nova solução óptima é X* = 0; Y* = 2; Z* = 3/2 com F* = 25/2.**

**f) Introdução da nova restrição: $2 . X + Y \leq 7$**

**$( X^* , Y^* ) = ( 3 , 2 ) \Rightarrow 2 . 3 + 2 = 8 > 7$ !**

**Conclusão: a solução óptima vai ser alterada !**

**Para se determinar a nova solução óptima poder-se-ia recorrer ao Algoritmo Simplex Dual (a partir do último Quadro do Simplex), ou, alternativamente, poderemos arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e recorrer ao Algoritmo Simplex Primal. Dado que este problema tem apenas duas "variáveis originais", poderemos resolvê-lo graficamente.**

**A nova solução óptima é X* = 5/2; Y* = 2 com F* = 19/2.**

☞ Verifique o resultado anterior ! Aproveite para fazer uma resolução gráfica do problema "alterado". Identifique a base óptima a partir da resolução gráfica. Recorrendo à formulação matricial do Simplex obtenha o Quadro correspondente à base óptima. A partir da resolução gráfica, escolha uma solução básica admissível não óptima para adoptar como solução inicial e resolva o problema com o Algoritmo Simplex Revisto. [ E mais nada ? ... ]



**Quadro do Simplex correspondente à nova solução óptima:**

| | X | Y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | TI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 | 5/2 |
| Y | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| $F_1$ | 0 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 3/2 |
| $F_3$ | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | - 1/2 | 1/2 |
| F | 0 | 0 | 0 | + 1/2 | 0 | + 3/2 | 19/2 |